

文章编号 1004-924X(2006)03-0520-06

改进的奇异值分解法估计图像点扩散函数

汪源源, 孙志民, 蔡 铮

(复旦大学 电子工程系, 上海 200433)

摘要: 为了提高图像复原算法的性能, 提出了一种改进的奇异值分解法估计图像的点扩散函数。从图像的退化离散模型出发, 对图像进行逐层分块奇异值分解, 并自动选取奇异值重组阶数以减少噪声对估计的影响。利用理想图像奇异向量平均能谱指数模型, 估计点扩散函数奇异值向量的频谱, 再反傅里叶变换得到其时域结果。实验结果表明, 该方法能在不同信噪比情况下估计成像系统的点扩散函数, 估计结果比原有估计方法有所提高, 有望为图像复原算法的预处理提供一种有效的手段。

关键词: 图像复原; 点扩散函数; 分块奇异值分解; 图像退化; 平均能谱指数模型

中图分类号: TP391.4 **文献标识码:** A

Estimation of PSF of image system using modified SVD method

WANG Yuan-yuan, SUN Zhi-Min, CAI Zheng

(Department of Electron Engineering, Fudan University, Shanghai 200433, China)

Abstract: To improve the performance of image restoration algorithms, a modified Singular Value Decomposition (SVD) method was proposed to estimate the Point Spread Function (PSF) of an imaging system. Using the discrete image degradation model, a block-based SVD filter scheme was applied for the image denoising with an automatically determined singular value rank. After the spectra of PSF singular vectors were estimated under an exponential model for the averaged spectra of un-degraded image singular vectors, the IFFT was used to get the time-domain estimation of the PSF. The experimental results show that this proposed method can be applied to estimate the PSF of the imaging system under a wide SNR range and its performance is better than the original method. It may be used as an effective method for the image preprocessing in image restoration problems.

Key words: image restoration; Point Spread Function (PSF); block-based Singular Value Decomposition (SVD); image degradation; exponential model of averaged spectra

1 引言

在图像成像过程中, 成像系统性能造成的图

像边缘模糊和成像条件等因素带来的噪声叠加, 往往使得图像质量退化。为了去除或减轻这些在成像过程中发生的图像质量退化, 除提高成像系统性能和改善成像条件外^[1-2], 还可以利用图像复

收稿日期: 2005-11-31; 修订日期: 2006-01-24.

基金项目: 国家自然科学基金资助 (No. 30570488)

原方法对退化的图像进行处理。图像退化的通用模型中,图像边缘模糊被视为一个二维点扩散函数(PSF)与原始图像的卷积过程,成像噪声则是一个加性的高斯白噪声。因而,成像系统可以利用这个二维点扩散函数和噪声方差或信噪比参数进行描述。

作为图像复原方法应用中的一个关键环节,成像系统点扩散函数的估计问题已经有许多算法,例如早期的基于图像复倒谱的估计方法^[3],基于二维 ARMA 模型的估计方法^[4-5],利用多帧图像序列维纳滤波方法^[6]和近期出现的基于奇异值分解的估计方法^[7-8]等。

2 基于奇异值分解的估计方法

根据矩阵奇异值分解理论,任意一个大小为 $P \times Q$ 的矩阵 A ($P > Q$) 可以写成:

$$A = U V^T = \sum_{r=1}^Q s_r u_r u_r^T = \sum_{r=1}^{R_A} s_r u_r u_r^T, \quad (1)$$

其中, U 和 V 分别为 $P \times Q$ 的左奇异阵和 $Q \times Q$ 的右奇异阵,各列向量 u_r 和 v_r 互相正交; $Q \times Q$ 的对角阵 Σ 是 A 的奇异值矩阵,由各阶奇异值 s_r 按式(2)从大到小排列组成; R_A 为 A 的秩 ($R_A \leq Q$)。

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_{R_A} > s_{R_A+1} = \dots = s_Q = 0, \quad (2)$$

一般地,图像退化模型如式(3)所示:

$$G = h * F + N, \quad (3)$$

其中, F 、 G 和 N 分别为理想源图像、退化图像和零均值高斯白噪声,大小均为 $N \times N$; h 为 $(2K+1) \times (2L+1)$ 的空间不变点扩散函数。该模型的离散形式为:

$$g(i, j) = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L h(k, l) f(i-k, j-l) + n(i, j), \quad (4)$$

其中, $f(i, j)$ 、 $g(i, j)$ 、 $n(i, j)$ 和 $h(k, l)$ 分别代表 F 、 G 、 N 和 h 的离散形式。对源图像和退化图像分别进行奇异值分解,则式(4)可以变换为:

$$\sum_{r=1}^{R_G} s_{rG} u_{rG} u_{rG}^T = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L h(k, l) \sum_{r=1}^{R_F} s_{rF} u_{rF} u_{rF}^T + N, \quad (5)$$

其中 R_G 和 R_F 分别为源图像和退化图像矩阵的秩 ($R_G \leq N, R_F \leq N$), s_{rG} 和 s_{rF} 分别为源图像和退化图像矩阵的第 r 个奇异值, u_{rG} 和 u_{rF} 分别为相

应的左奇异向量, v_{rG} 和 v_{rF} 分别为相应的右奇异向量。

同样地,点扩散函数 h 也可以进行奇异值分解,并可以用第一阶重组近似表示,如式(6):

$$h = \sum_{p=1}^{R_h} s_{1h} u_{1h} u_{1h}^T, \quad (6)$$

将式(6)代入式(5),观察等式的两边,可以得到图像和点扩散函数的奇异值向量间的卷积关系^[7-8]:

$$\sum_{r=1}^R u_{rG} u_{rG}^T * \sum_{r=1}^R u_{rF} u_{rF}^T = \sum_{r=1}^R v_{rG} v_{rG}^T * \sum_{r=1}^R v_{rF} v_{rF}^T, \quad (7)$$

为了利用这种时域的卷积关系来估计点扩散函数,可以把它变换到频域后进行处理。式(8)给出了理想图像奇异向量平均能谱的指数模型^[7-8]:

$$S_{uF} = S_{vF} = \text{DFT} \left(\frac{1}{R} |n|^{-N/2} \right), \quad (8)$$

其中, S_{uF} 和 S_{vF} 分别为理想图像源一阶左奇异向量和右奇异值向量的平均能谱, R 为选取的奇异向量重组阶数 ($R \leq N$), $|n|$ 表示前 R 阶奇异向量的一步自相关系数平均值,这里根据实验可取为 0.84 ^[8]。

这样就可以从式(7)估计点扩散函数第一阶奇异值向量的频谱,其幅度估计如式(9)所示:

$$U_G = \sqrt{\frac{S_{ruG}}{R S_{uF}}}, \quad V_G = \sqrt{\frac{S_{rvG}}{R S_{vF}}}, \quad (9)$$

其中 S_{ruG} 和 S_{rvG} 分别为退化图像第 r 阶左奇异向量和右奇异值向量的能谱。奇异值向量频谱的相位通常设为零,直到从幅度估计中检测到过零点时跳转为 π 相位^[5]。将点扩散函数第一阶奇异向量的幅度和相位估计结果耦合后进行反傅里叶变换,可以得到相应的时域估计结果,选定奇异向量的边界^[8]后再进行重组,得到点扩散函数的估计值。

3 改进的点扩散函数估计方法

上述估计算法中,整个图像矩阵进行奇异值分解后,根据经验选取固定的阶数进行重组^[8],其他数值较小的奇异值被认为对应于图像的噪声,因而将这些奇异值置为零。

这样处理存在两个问题。一是选取的奇异值重组阶数是固定的一个经验数值。不同的噪声水

平下,选取的重组阶数应该是不同的,根据经验选取固定的数值无法取得很好的效果。二是忽略了图像的局部差异。图像信号在不同局部强弱不同,但噪声在各局部的统计表现却是基本一致的,因而对于存在差异的图像局部而言,噪声在其奇异值中的表现存在差异,直接在全局奇异值中筛选无法很好去除图像中的噪声。

针对以上两个问题,本文对原有估计算法进行两点改进。

3.1 奇异值重组阶数的自动选取

上述退化模型中,设 $S = h * F$, 则 $G = S + N$, 设 S 的秩为 $R < N$, 则其后 $(N-R)$ 阶奇异值为 0。由于噪声 N 通常是一个满秩的矩阵,因此 G 的后 $(N-R)$ 阶奇异值不再为 0, 而只是一些较小的数值,并且与其前 R 阶奇异值相比要小很多,将这些奇异值设为 0 后进行重组得到的 G 更接近于 S , 从而起到减轻噪声影响的作用。

为了自动选取 R , 令 $c_i = \sum_{j=1}^i c_j$, 其中 $i = 1, 2, \dots, N$ 。根据 $\{c_i\}_i^N$ 的特点, $\{c_i\}_i^N$ 组成的曲线可以用两段不同斜率的线段近似表示, 其交点处对应的 c_i 就是 c_R 。因而只需要通过简单的几何关系找到这两段近似线段的交点, 就可以确定 R 的取值。如图 1 所示, 曲线 ABC 可以用 AB 和 BC 两条线段近似, BD 垂直于线段 AC 且与曲线 ABC 交于 B 点, 当 BD 取到其最大值时, B 点对应的阶数就是 R , 此时 BE 也取到其最大值。实际上, 可以将曲线 ABC 和直线段 AC 看作阶数为 i 的两个函数, 它们的距离就是 BE 。据此可以方便地确定 R 。

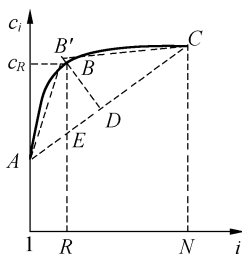


图 1 R 自动选取方法示意图

Fig.1 Demonstration of the automatic selection of R

3.2 图像分块逐层递进作奇异值分解

考虑到噪声在图像不同局部的不同影响,将图像进行分块,并改变分块大小逐层递进应用奇

异值分解,然后选取一定的阶数进行重组去噪^[9]。

具体的步骤如下:

(1) 初始化子块大小为 $m \times m, m = 4$ 。

(2) 退化图像 G 被分割成 $m \times m$ 大小的子块集 $\{Gb_i\}_i^M$, 其中 $M = \left(\frac{N}{m}\right)^2$ 。

(3) 各个子块分别进行奇异值分解,并用 3.1 节中的方法自动选取重组的阶数,重组得到新的子块集 $\{Gb_i\}_i^M$,并按原来顺序组合成 G 。

(4) 如果 $m = N/4$, 循环结束,得到的 G 就是去噪后的最终结果。否则,用 G 取代 G, m 增大一倍,回到步骤(2)进行新一轮循环。

综上,改进后的点扩散函数估计方法步骤为:先对退化图像 G 进行逐层分块奇异值分解,并自动选取重组的奇异值阶数,重组得到降噪后的图像,并通过理想图像奇异向量平均能谱的指数模型,得到点扩散函数频域的估计结果。最后将频域的估计结果反傅里叶变换到时域,进行必要处理得到最终的估计结果。

4 实验结果和分析

本文对改进的点扩散函数估计方法,进行了模拟实验来评估其性能。实验中,先以 256×256 的标准数字图像作为理想的成像源图像,选用 3×3 的点扩散函数对其进行模糊,并叠加一定信噪比的零均值高斯白噪声后得到退化图像。

为验证估计方法的有效性,先后用表 1 所示的两种不同类型点扩散函数进行实验。

表 1 实验所用的两种不同类型 PSF

Tab.1 PSF of two different types for experiments

均值型 PSF			高斯型 PSF		
0.1111	0.1111	0.1111	0.0751	0.1238	0.0751
0.1111	0.1111	0.1111	0.1238	0.2042	0.1238
0.1111	0.1111	0.1111	0.0751	0.1238	0.0751

为了对比方法改进前后的性能,分别应用改进前后的方法处理退化图像来估计点扩散函数:

(1) 退化图像整体作奇异值分解,且固定重组阶数 $R = 40$,即为原有估计方法;

(2) 退化图像逐层分块作奇异值分解,且自动选取重组阶数,即为本文提出的改进估计方法。

得到估计结果后,对两种方法各自去噪后的

图像分别进行反卷积,并与源图像比较计算其信噪比(SNR)和峰值信噪比(PSNR)。

表 2 为在不同信噪比下对 Lena 图像进行实验得到的估计结果。从中可以发现,改进方法的估计结果比原有方法的估计结果数值上更接近实际 PSF,说明改进的方法比原有方法在估计性能上有所提高。另外,对高斯型 PSF 的估计效果随信噪比的提高有所改善,而对均值型 PSF 的估计效果在信噪比提高时反而变差,说明估计算法更符合高斯型 PSF 的成像模型,即本文提出的改进估计方法对高斯型 PSF 的估计更加准确。在实际成像中,高斯型 PSF 是最常见的一种模型,因此本文的改进算法更加符合实际情况。

作为实例,图 2 给出了 30 dB 信噪比、高斯型 PSF 下估计出 PSF 后进行反卷积得到的复原图像。可见,利用改进方法估计得到的 PSF 进行复原的效果更好。

本文还对 9 幅标准数字图像(如图 3 所示)进行了实验,采用表 1 中的高斯型 PSF,在不同的信噪比下分别利用两种方法估计 PSF,并用估计的结果对降噪后的退化图像进行反卷积复原,然后与源图像比较计算其 SNR 和 PSNR。图 4 为在加噪信噪比为 30 ~ 50 dB 的情况下,对用两种方法估计得到的 PSF 进行反卷积复原,得到的复原图像与源图像相比的 SNR。可以看到在不同信噪比下,与原有方法相比,用改进方法估计得到的 PSF 进行复原的效果普遍有所改善,提高 1 dB 左右。PSNR 的比较结果也基本如此。

表 2 不同信噪比下 Lena 图像的实验结果

Tab. 2 Experimental results of the Lena image with different signal-to-noise ratios (SNR)

(a) 均值型 PSF 的估计结果对比

(a) Estimated averaging PSF by two methods

SNR (dB)	原有方法估计结果		改进方法估计结果	
30	0.1073	0.1194	0.1073	0.1086
	0.1111	0.1111	0.1111	0.1086
	0.1067	0.1188	0.1067	0.1135
40	0.1073	0.1194	0.1073	0.1086
	0.1111	0.1111	0.1111	0.1086
	0.0966	0.1187	0.0966	0.0975
50	0.1165	0.1431	0.1165	0.1148
	0.1111	0.1111	0.1111	0.1148
	0.0966	0.1187	0.0966	0.0975
50	0.0952	0.1175	0.0952	0.0972
	0.1187	0.1465	0.1187	0.1140
	0.0952	0.1175	0.0952	0.0972

(b) 高斯型 PSF 的估计结果对比

(b) Estimated Gaussian PSF by two methods

SNR (dB)	原有方法估计结果		改进方法估计结果	
30	0.0649	0.1390	0.0649	0.0711
	0.0711	0.0968	0.0711	0.0711
	0.1116	0.2389	0.1116	0.1553
40	0.0649	0.1390	0.0649	0.0711
	0.0777	0.1289	0.0777	0.0759
	0.1179	0.1957	0.1179	0.1141
50	0.0777	0.1289	0.0777	0.0759
	0.0729	0.1274	0.0729	0.0736
	0.1210	0.2116	0.1210	0.1230
	0.0729	0.1274	0.0729	0.0736



SNR = 20.33 dB

PSNR = 27.55 dB

(a) 原有方法估计 PSF 复原图像

(a) Original method



SNR = 21.69 dB

PSNR = 28.91 dB

(b) 改进方法估计 PSF 复原图像

(b) Modified method

图 2 SNR = 30 dB 时用两种方法对高斯型 PSF 的估计后反卷积得到的复原图像

Fig. 2 Deconvolution results using the estimated Gaussian PSF by the two methods respectively under SNR = 30 dB

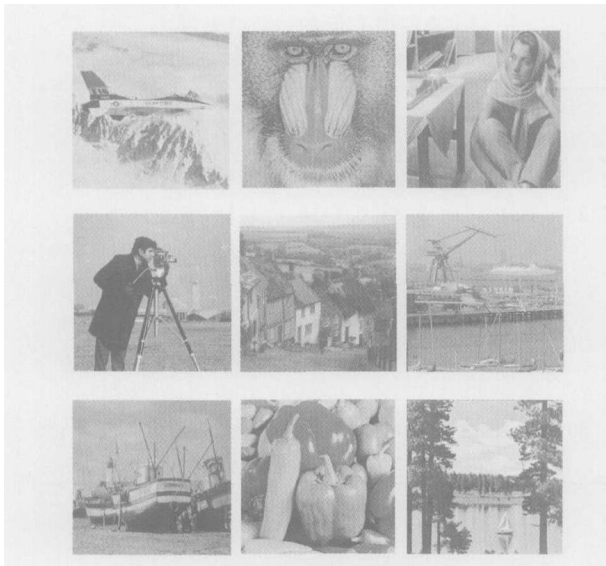
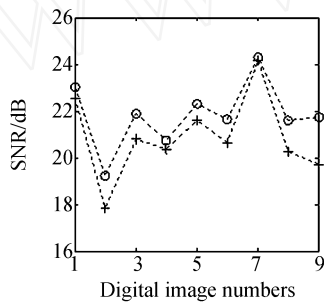
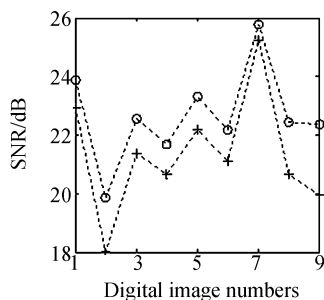


图 3 实验用标准数字图像(序号为 1~9)

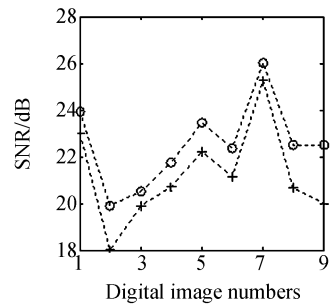
Fig. 3 Standard digital images for experiment (indexed with 1~9)



(a) 30 dB



(b) 40 dB



(c) 50 dB

图 4 不同信噪比下分别用原有方法('+'表示)和改进方法('o'表示)估计的 PSF 复原的结果

Fig. 4 Deconvolution results using the estimated PSF by the original method (denoted by '+') and modified method (denoted by 'o') with various SNRs

5 结 论

针对奇异值分解法估计图像点扩散函数存在的主要缺点,本文提出了改进方法:从图像退化离散模型出发,对图像进行分块逐层奇异值分解,并自动选取奇异值重组阶数以减少噪声对估计的影响,然后再进行基于奇异值分解的估计。

对两种不同类型的 PSF 进行估计的实验结果表明,该方法对比较普遍的高斯型 PSF 具有较好的估计效果。对部分标准数字图像的实验结果表明,改进后的方法能够在不同信噪比情况下估计成像系统的点扩散函数,且其估计结果比原有方法有所提高,有望为图像复原算法的预处理提供一种有效的手段。

参考文献:

- [1] 陈迎娟,张之江,张智强. CCD 像素响应不均匀性的校正方法[J]. 光学精密工程, 2004, 12(2): 216-220.
CHEN YJ, ZHANG ZJ, ZHANG Z G. Correction of CCD pixel nonuniformity[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2004, 12(2): 216-220. (in Chinese)
- [2] 余帆,李德华,薛雷. 光学和图像处理设备中的电磁兼容性设计[J]. 光学精密工程, 2004, 12(1): 100-106.
YU F, LID H, XUEL. Electromagnetic compatibility design in optics and image processing equipment[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2004, 12(1): 100-106. (in Chinese)

- [3] CANNON M. Blind deconvolution of spatially invariant image blurs with phase[J]. *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1976, 24(1): 58-63.
- [4] TEKALP A M, KAUFMAN H, WOODS J W. Identification of image and blur parameters for the restoration of noncausal blurs[J]. *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1986, 34(4): 963-972.
- [5] TEKALP A M, KAUFMAN H. On statistical identification of a class of linear space-invariant image blurs using non-minimum-phase ARMA models[J]. *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1988, 36(8): 1360-1363.
- [6] OZKAN M K, ERDEM A T, SEZAN M I, *et al.* Efficient multiframe Wiener restoration of blurred and noisy image sequences[J]. *IEEE Trans. Image Processing*, 1992, 1(5): 453-476.
- [7] DEVCIC Z, LONCARIC S. Simultaneous estimation of PSF and global frame shifts at lower S/N ratios[C]. *IEEE Proc. Image and Signal Processing and Analysis, Pula, 2000.*
- [8] DEVCIC Z, LONCARIC S. Blur identification using averaged spectra of degraded image singular vectors[C]. *IEEE Proc. Acoustics, Speech and Signal Processing, Turkey, 2000.*
- [9] KONSTANTINIDES K, NATARAJAN B, YOVANOF G S. Noise estimation and filtering using block-based singular value decomposition[J]. *IEEE Trans. Image Processing*, 1997, 6(4): 479-483.

作者简介:汪源源(1968-),男,复旦大学电子工程系教授、理学博士、博士生导师,研究方向为医学信息处理、医学超声工程。